

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN HOÀNG HUY TÚ

VỀ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU
ĐỊA PHƯƠNG HÌNH THỨC

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số ngành: 9460104

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TP. Hồ Chí Minh - 2025

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn khoa học:

1. HDC: PGS. TS. Trần Tuấn Nam
2. HDP: TS. Trịnh Thanh Đèo

Phản biện 1: GS.TS. Nguyễn Sum

Phản biện 2: PGS.TS. Phan Thanh Toàn

Phản biện 3: PGS.TS. Lê Anh Vũ

Phản biện độc lập 1: GS.TS. Lê Văn Thuyết

Phản biện độc lập 2: TS. Bành Đức Dũng

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, vào hồi ... giờ ... ngày ... tháng ... năm ...

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

- Thư viện Khoa học Tổng hợp TP.HCM
- Thư viện Đại học Quốc gia TP.HCM
- Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

Mở đầu

Vào năm 2006, một loại đối đồng điều địa phương mới, đối đồng điều địa phương hình thức, được giới thiệu bởi P. Schenzel. Cho I, J là idêan của R và M là R -môđun. Ta kí hiệu $C_{\underline{x}}^{\bullet}$ là phức Čech của R ứng với $\underline{x} = x_1, x_2, \dots, x_r$ trong đó $J = \sqrt{(x_1, x_2, \dots, x_r)R}$. Bây giờ hệ ngược các môđun $\{M/I^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ cảm sinh hệ ngược các phức $\{C_{\underline{x}}^{\bullet} \otimes_R M/I^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$. Môđun đối đồng điều địa phương I -hình thức thứ i của M ứng với J được kí hiệu bởi $\mathcal{F}_{I,J}^i(M)$, và định nghĩa như sau

$$\mathcal{F}_{I,J}^i(M) := H^i(\varprojlim_t (C_{\underline{x}}^{\bullet} \otimes_R M/I^t M)).$$

Trong trường hợp $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, $J = \mathfrak{m}$ và M là R -môđun hữu hạn sinh, môđun đối đồng điều địa phương hình thức, được kí hiệu ngắn gọn là $\mathcal{F}_I^i(M)$, đẳng cấu với giới hạn ngược của các môđun đối đồng điều địa phương Grothendieck

$$\mathcal{F}_I^i(M) \cong \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^t M)$$

Trước đó, khái niệm này đã đưa ra đầu tiên bởi Peskine và Szpiro trong [14] nhằm khảo sát tính triệu tiêu của môđun đối đồng điều địa phương trên vành chính quy nhưng nó không được nhiều người biết đến. Phải đến khi bài báo [11] của P. Schenzel được xuất bản, lý thuyết này mới chính thức được biết đến và thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Cụ thể, vào năm 2011, trong [1], Asgharzadeh và Divaani-Aazar đã bổ sung các kết quả về môđun đối đồng điều địa phương hình thức

liên quan đến các tính chất hữu hạn và bậc hình thức. Đặc biệt, dựa vào bậc hình thức nhóm tác giả đã đưa ra tiêu chuẩn về tính Cohen-Macaulay của môđun trên vành giao hoán và xây dựng một chặn trên cho chiều đối đồng điều. Trong [3], Chu dựa trên các công trình trên để tiếp tục nghiên cứu về cấu trúc và tính Coartin của môđun đối đồng điều địa phương hình thức. Ngoài ra, Chu còn khảo sát về môđun đối đồng điều địa phương hình thức thứ 0. Nói chung môđun đối đồng điều địa phương hình thức không hữu hạn sinh. Trong [12] Yan nghiên cứu về tính Artin của các môđun này.

Xuyên suốt luận án, chúng tôi luôn giả sử R là vành Noether giao hoán không tầm thường. Nội dung luận án bao gồm 6 chương: trong đó Chương 1 trình bày những định nghĩa và định lý quan trọng về môđun đối đồng điều địa phương Grothendieck và môđun đối đồng điều địa phương hình thức. Các chương 2, 3, 4 và 5 trình bày nội dung chính của luận án. Chương 6 tổng hợp các kết quả chính và đưa ra các bàn luận.

Trong chương 2, chúng tôi nghiên cứu về tính Artin, tập idêan nguyên tố đối liên kết, tập đối giá và một số kết quả liên quan đến phạm trù con Serre của môđun đối đồng điều địa phương hình thức trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$. Đầu tiên, chúng tôi khảo sát về môđun đối đồng điều địa phương hình thức bậc cao $\mathcal{F}_I^l(M)$ trong đó $l = \dim_R M/IM$. Đây là bước quan trọng để giải quyết vấn đề sau:

Vấn đề 1: Xác định số nguyên i lớn nhất sao cho $F_I^i(M)$ không Artin.

Chúng ta biết rằng, với M là R -môđun hữu hạn sinh, môđun đối đồng điều địa phương bậc cao $H_{\mathfrak{m}}^{\dim M}(M)$ luôn luôn Artin. Tuy nhiên, kết quả tương tự không đúng cho môđun đối đồng điều địa phương

hình thức. Để giải quyết Vấn đề 1, chúng tôi xét đồng cấu tự nhiên

$$p_n^i : \mathcal{F}_I^i(M) = \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^t M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^n M).$$

Định lý 2.1.5 chỉ ra rằng $\mathcal{F}_I^i(M)$ là Artin khi và chỉ khi $\text{Ker} p_n^i = \text{Ker} p_{n+1}^i$ với mọi số nguyên đủ lớn $n \in \mathbb{N}$. Điều này giúp ta xây dựng điều kiện tương đương để $\mathcal{F}_I^l(M)$ là môđun Artin. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh sao cho $M \neq IM$, ta có $\mathcal{F}_I^l(M)$ là Artin khi và chỉ khi $l > \dim_R(\overline{M}/I\overline{M})$ trong đó $\overline{M} = M/H_I^0(M)$. Từ đó, ta có

$$\dim_R(\overline{M}/I\overline{M}) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{F}_I^i(M) \text{ không Artin}\}$$

với $\overline{M} \neq I\overline{M}$.

Tiếp nối Vấn đề 1, với t là một số nguyên, Asgharzadeh và Divaani-Aazar trong [1] đã chứng minh rằng nếu $\mathcal{F}_I^i(M)$ là Artin với mọi i lớn hơn t thì $\mathcal{F}_I^t(M)/I\mathcal{F}_I^t(M)$ cũng Artin. Hệ quả là tập idêan nguyên tố đối liên kết

$$\text{Coass}_R(\mathcal{F}_I^t(M)) \cap V(I)$$

là tập hữu hạn. Lưu ý, vì $\mathcal{F}_I^i(M) = 0$ nên nó là môđun Artin với mọi $i > \dim_R(M/IM)$. Từ đây chúng tôi đặt ra và giải quyết vấn đề sau

Vấn đề 2: Mô tả tập hữu hạn $\text{Coass}_R(\mathcal{F}_I^l(M)) \cap V(I)$, trong đó $l = \dim_R(M/IM)$.

Ngoài ra, trong chương 2, chúng tôi còn đưa ra các kết quả về môđun đối đồng điều địa phương hình thức liên quan đến phạm trù con Serre.

Nội dung của chương 3 tập trung khảo sát tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương hình thức. Cụ thể chúng tôi quan tâm đến vấn đề sau

Vấn đề 3: Tìm mối liên hệ giữa tính triệt tiêu của môđun $\mathcal{F}_I^i(M)$ và sự tương đương của một số tôpô tuyến tính.

Động lực của Vấn đề trên nằm ở kết quả sau. Trong [11], P. Schenzel đã chứng minh rằng trong trường hợp R là vành Gorenstein ta có đẳng cấu

$$\mathcal{F}_I^i(R) \cong \text{Hom}_R(H_I^{\dim R - i}(R), E(R/\mathfrak{m})).$$

Khi đó $\mathcal{F}_I^0(R)$ đẳng cấu với đối ngẫu Matlis của môđun đối đồng điều địa phương $H_I^{\dim R}(R)$. Tính triệt tiêu của môđun $H_I^{\dim R}(R)$ được miêu tả trong Định lý Lichtenbaum-Hartshorne, một định lý vô cùng quan trọng trong lý thuyết đối đồng điều địa phương. Hiện có ít nhất hai chứng minh khác nhau cho Định lý Lichtenbaum-Hartshorne ([4, 3.1], [14, III, 3.1]). Tuy nhiên, tất cả chứng minh này đều có một điểm chung, đó là so sánh sự tương đương của một số tập ô idêan trên vành địa phương đầy đủ thông qua Định lý Chevalley. Từ góc nhìn này, ta thấy rằng tính triệt tiêu của $\mathcal{F}_I^0(R)$ liên quan đến bài toán so sánh các tập ô tuyến tính.

Một trong những bước cần thiết để giải quyết Vấn đề 3 chính là mở rộng Định lý Chevalley. Hướng mở rộng của chúng tôi dựa vào kết quả sau: Cho M là R -môđun, xét hai dãy giảm các R -môđun con của M , kí hiệu là $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sao cho $H_n \subseteq K_n$. Hơn nữa, giả sử hệ ngược $\{K_n/H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ thoả mãn điều kiện Mittag-Leffler. Chúng tôi chứng minh rằng $\varprojlim_n K_n/H_n = 0$ khi và chỉ khi, với mọi n , tồn tại số nguyên $s(n)$ sao cho $K_{s(n)} \subseteq H_n$. Khi đó, giới hạn ngược $\varprojlim_n K_n/H_n$ đóng vai trò là điều kiện cho sự tương đương của các tập ô tuyến tính định nghĩa bởi $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Lưu ý rằng, khi xét $H_n = I^n$ và $K_n = I^n :_R \langle \mathfrak{m} \rangle$, ta có $\varprojlim_n K_n/H_n$ đẳng cấu với đối đồng điều địa phương hình thức của R .

Trong chương 4, chúng tôi tập trung khảo sát các môđun đối đồng điều địa phương hình thức ứng với idêan không tối đại. Trong [11, 3.2],

P. Schenzel đã chứng minh rằng tồn tại một dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow \varprojlim_t^1 H_J^{i-1}(M/I^t M) \longrightarrow \mathcal{F}_{I,J}^i(M) \longrightarrow \varprojlim_t H_J^i(M/I^t M) \longrightarrow 0$$

với mọi $i \in \mathbb{Z}$. Đặc biệt, nếu R là vành địa phương với idean tối đại $\mathfrak{m}$ và $J = \mathfrak{m}$, thì ta có đẳng cấu

$$\mathcal{F}_{I,\mathfrak{m}}^i(M) \cong \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^t M),$$

trong đó M là R -môđun hữu hạn sinh. Đáng lưu ý rằng hầu hết các công trình hiện tại về đối đồng điều địa phương hình thức đều xoay quanh trường hợp này. Quan sát dãy khớp ngắn trên, ta thấy việc khảo sát $\mathcal{F}_{I,J}^i(M)$ trong trường hợp J không tối đại là rất khó khăn vì ta phải hiểu về $\varprojlim_t^1 H_J^{i-1}(M/I^t M)$. Do đó, vấn đề sau được quan tâm trong Luận án của chúng tôi.

Vấn đề 4: Nghiên cứu các tính chất của môđun đối đồng điều địa phương hình thức $\mathcal{F}_{I,J}^i(M)$ trong trường hợp J không phải là idean tối đại.

Kỹ thuật chính được chúng tôi sử dụng trong chương này là hàm tử biến đổi idean. Chúng tôi nghiên cứu và sử dụng các hàm tử dẫn xuất của tích $D_J \Gamma_I$ để giải quyết Vấn đề 4. Các hàm tử $R^i(D_J \Gamma_I)$ giúp chúng ta khảo sát các đồng cấu $H_J^i(M) \rightarrow H_I^i(M)$ thông qua dãy khớp dài

$$\dots \longrightarrow H_J^i(M) \longrightarrow H_I^i(M) \longrightarrow R^i(D_J \Gamma_I)(M) \longrightarrow \dots,$$

một trong những kết quả chính của chương 4.

Nội dung chính của chương 5 là giới thiệu một mở rộng của khái niệm môđun đối đồng điều địa phương hình thức, mà chúng tôi gọi là môđun đối đồng địa phương suy rộng hình thức. Cụ thể, cho M, N

là các R -môđun hữu hạn sinh và I là idêan của vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$. Ta xét hệ ngược các môđun đối đồng điều địa phương suy rộng $\{H_{\mathfrak{m}}^i(M, N/I^t N)\}_{t \in \mathbb{N}}$. Chúng tôi kí hiệu giới hạn ngược của hệ trên là

$$\mathcal{F}_I^i(M, N) := \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M, N/I^t N)$$

và gọi là môđun đối đồng điều địa phương suy rộng I -hình thức thứ i của M và N . Đáng chú ý rằng khái niệm này thực sự là một mở rộng của đối đồng điều địa phương hình thức [11]. Trong trường hợp đặc biệt khi $M = R$, môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức trùng với môđun đối đồng điều địa phương hình thức gốc. Hơn nữa, nếu $\text{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$ thì $\varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M, N/I^t N) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$. Môđun thứ hai trong đẳng cấu trên được gọi là môđun đối đồng điều địa phương suy rộng, được đưa ra đầu tiên bởi J. Herzog [15].

Vấn đề 5: Khảo sát một cách hệ thống các tính chất của môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức $\mathcal{F}_I^i(M, N)$.

Trong trường hợp vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ là vành thương của vành Gorenstein $(R', \mathfrak{m}')$, P. Schenzel đã xây dựng các đẳng cấu

$$\varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^t M) \cong \text{Hom}_R(H_{IR'}^{n-i}(M, R'), E(R/\mathfrak{m}))$$

Ở đây, M được xem là R' -môđun, và $E(R/\mathfrak{m})$ kí hiệu cho bao nội xạ của trường thặng dư. Hệ quả, ta thấy rằng môđun đối đồng điều địa phương hình thức $\mathcal{F}_I^i(M)$ đẳng cấu với đối ngẫu Matlis của $H_{IR'}^{n-i}(M, R')$. Với quan sát này, Vấn đề 5 trở nên thú vị vì nó mở rộng cả các khái niệm đối đồng điều địa phương suy rộng và đối đồng điều địa phương hình thức.

1 Kiến thức chuẩn bị

Trong chương đầu tiên của luận án, chúng tôi hệ thống lại một số khái niệm, ký hiệu và kết quả cần thiết được sử dụng nhiều trong các chương sau. Các nội dung chúng tôi trình bày gồm hai phần. Phần đầu chúng tôi nhắc lại khái niệm đối đồng điều địa phương Grothendieck cùng các định lý liên quan. Phần thứ hai sẽ trình định nghĩa môđun đối đồng điều địa phương hình thức của Schenzel cùng các kết quả quan trọng.

2 Một số kết quả về môđun đối đồng điều địa phương hình thức

Trong suốt chương này, $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương giao hoán với đơn vị không tầm thường. Tổng quát, môđun đối đồng điều địa phương hình thức $\mathcal{F}_I^i(M)$ không hữu hạn sinh. Ở đây, chúng tôi nghiên cứu tính Artin của $\mathcal{F}_I^i(M)$. Hơn nữa, chúng tôi còn khảo sát tập idêan nguyên tố đối liên kết của $\mathcal{F}_I^i(M)$ và đưa ra một số kết quả liên quan đến phạm trù con Serre. Các kết quả trong mục 2.2 và 2.3 được công bố trong [7].

2.1 Tính Artin

Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Cho $i \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta xét đồng cấu tự nhiên

$$p_n^i : \mathcal{F}_I^i(M) = \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^t M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^n M).$$

Đặt $K_n^i = \text{Ker} p_n^i$. Khi đó $\{K_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ lập thành dãy giảm các môđun con của $\mathcal{F}_I^i(M)$.

Định lý 2.1.3. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh với $l = \dim M/IM$. Khi đó đồng cấu*

$$p_n^l : \mathcal{F}_I^l(M) = \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^l(M/I^t M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^l(M/I^n M)$$

là toàn cầu với mọi $n \in \mathbb{N}$. Đặc biệt, ta có đẳng cấu

$$\mathcal{F}_I^l(M)/K_n^l \cong H_{\mathfrak{m}}^l(M/I^n M)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Tiếp theo chúng ta cố gắng chỉ ra điều kiện để $\mathcal{F}_I^l(M)$ là môđun Artin. Đặt $\overline{M} = M/H_I^0(M)$ và $l = \dim M/IM$.

Định lý 2.1.5. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó $\mathcal{F}_I^i(M)$ Artin khi và chỉ khi dãy giảm các môđun $\{K_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ dừng.*

Hệ quả 2.1.10. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Giả sử rằng $\overline{M} \neq I\overline{M}$. Khi đó*

$$\dim \overline{M}/I\overline{M} = \sup\{i \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_I^i(M) \text{ không Artin}\}.$$

Chú ý rằng, nếu $\overline{M} = I\overline{M}$ thì $\mathcal{F}_I^i(M)$ là Artin với mọi $i \in \mathbb{Z}$. Do đó

$$\sup\{i \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_I^i(M) \text{ không Artin}\} = \infty.$$

2.2 Tập đối giá, tập idêan nguyên tố đối liên kết

Định nghĩa 2.2.1 ([5]). Cho S là tập đóng nhân của R và M là R -môđun. Đối địa phương của M ứng với S được định nghĩa là môđun $\text{Hom}_R(R_S, M)$.

Theo [5] ta định nghĩa $\text{Cos}_R(M)$ của R -môđun M là

$$\text{Cos}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, M) \neq 0\}.$$

Định lý 2.2.2. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó

$$\text{Cos}_R(\mathcal{F}_I^i(M)) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \text{Cos}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^n M))$$

với mọi $i \in \mathbb{Z}$. Đặc biệt, nếu $i > \dim(\overline{M}/I\overline{M})$ với $\overline{M} = M/H_I^0(M)$ thì tồn tại số nguyên c sao cho

$$\text{Cos}_R(\mathcal{F}_I^i(M)) = \bigcup_{n \geq c} \text{Cos}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M/I^n M)).$$

Hệ quả 2.2.4. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Đặt $l = \dim M/IM$. Khi đó $\text{Cos}_R(\mathcal{F}_I^l(M)) = \text{Supp}_R(M) \cap V(I)$.

Định lý 2.2.5. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh với $l = \dim M/IM$. Khi đó

$$\text{Coass}_R(\mathcal{F}_I^l(M)) \cap V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M/IM) \mid \dim R/\mathfrak{p} = l\}.$$

2.3 Các phạm trù con Serre

Trong suốt mục này, $\mathcal{S}$ kí hiệu cho phạm trù con Serre của phạm trù các R -môđun, nghĩa là $\mathcal{S}$ đóng dưới các phép lấy môđun con, môđun thương và mở rộng. Hơn nữa, cho $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ là phạm trù con Serre của phạm trù các R -môđun chứa tất cả các R -môđun Artin.

Định lý 2.2.3. Cho M và N là các R -môđun hữu hạn sinh với $\text{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$. Cho t là số nguyên không âm sao cho $\mathcal{F}_I^i(M) \in \mathcal{T}_1$ với mọi $i < t$ và L là môđun con của $\mathcal{F}_I^t(M)$ sao cho $\text{Ext}_R^1(N, L) \in \mathcal{T}_2$. Hơn nữa, giả sử rằng $\text{Ext}_R^1(R/I, B) \in \mathcal{T}_2$ với mọi $B \in \mathcal{T}_1$. Khi đó $\text{Hom}_R(N, \mathcal{F}_I^t(M)/L) \in \mathcal{T}_2$.

Hệ quả 2.3.7. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương.

- (i) $\mathcal{F}_I^i(M)$ là I -minimax với mọi $i < t$.
- (ii) $\mathcal{F}_I^i(M)$ là I -minimax và $\text{Tor}_j^R(R/I, \mathcal{F}_I^i(M))$ là Artin với mọi $i < t$ và $j \in \mathbb{Z}$,
- (iii) Tồn tại số nguyên dương t sao cho $\mathcal{F}_I^i(M)/0 :_{\mathcal{F}_I^i(M)} I^n$ là I -minimax với mọi $i < t$.

Hệ quả, nếu $\mathcal{F}_I^i(M)$ là I -minimax với mọi $i < t$ thì $\text{Hom}_R(R/I, \mathcal{F}_I^t(M))$ là Artin.

Định lý 2.3.9. Cho M, N là các môđun hữu hạn sinh với $\text{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$. Cho t là số nguyên không âm sao cho $\mathcal{F}_I^i(M) \in \mathcal{T}_1$ với mọi $i > t$ và L là môđun con của $\mathcal{F}_I^t(M)$ sao cho $\text{Tor}_1^R(N, \mathcal{F}_I^t(M)/L) \in \mathcal{T}_2$. Hơn nữa, giả sử $\text{Tor}_1^R(R/I, B) \in \mathcal{T}_2$ với mọi $B \in \mathcal{T}_1$. Khi đó $N \otimes_R L \in \mathcal{T}_2$.

Hệ quả 2.3.12. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm. Các mệnh đề sau tương đương

- (i) $\mathcal{F}_I^i(M)$ là minimax với mọi $i > t$.
- (ii) $\mathcal{F}_I^i(M)$ là minimax và $\text{Tor}_j^R(R/I, \mathcal{F}_I^i(M))$ là Artin với mọi $i > t$ và $j \in \mathbb{Z}$.
- (iii) Tồn tại số nguyên dương n sao cho $I^n \mathcal{F}_I^i(M)$ là minimax với mọi $i > t$.

Hệ quả, nếu $\mathcal{F}_I^i(M)$ là minimax với mọi $i > t$ thì $\mathcal{F}_I^t(M)/I\mathcal{F}_I^t(M)$ là Artin.

3 Đối đồng điều địa phương hình thức và sự tương đương các tôpô idêan

Trong chương này, R kí hiệu cho vành Noether giao hoán. Chúng tôi nghiên cứu về tính triệt tiêu và không triệt của môđun đối đồng điều địa phương hình thức. Các kết quả này được dựa trên các dạng mở rộng của Định lý Chevalley trên vành địa phương đầy đủ. Các kết quả đạt đều mới và được công bố trong [9].

3.1 Các dạng mở rộng của Định lý Chevalley

Đầu tiên, chúng tôi sẽ trình bày một định lý quan trọng sau. Đây là ý tưởng chính để chúng tôi so sánh các tôpô idêan.

Định lý 3.1.2. *Cho M là R -môđun. Cho $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hai dãy giảm các môđun con của M sao cho $H_n \subseteq K_n$ với mọi n . Nếu hệ ngược $\{K_n/H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ thoả tiêu chuẩn Mittag-Leffler thì các mệnh đề sau tương đương.*

- (i) $\varprojlim_n K_n/H_n = 0$.
- (ii) Đồng cấu tự nhiên $\varprojlim_n M/H_n \rightarrow \varprojlim_n M/K_n$ là đẳng cấu.

(iii) Với mọi n , tồn tại số nguyên $s(n)$ sao cho $K_{s(n)} \subseteq H_n$.

Kết quả sau đây là một phiên bản của Định lý 3.1.2 cho trường hợp M là R -môđun hữu hạn sinh.

Hệ quả 3.1.4. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Cho $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hai dãy giảm các môđun con của M sao cho $H_n \subseteq K_n$ với mọi n . Giả sử rằng tồn tại số nguyên n đủ lớn sao cho $\text{Ass}_R(K_n/H_n)$ không phụ thuộc vào giá trị n và mỗi idêan nguyên tố liên kết của K_n/H_n đều là tối tiểu. Đặt A^* là tập idêan nguyên tố liên kết ổn định. Các mệnh đề sau tương đương

(i) $\varprojlim_n (K_n \otimes_R R_{\mathfrak{p}} / H_n \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) = 0$ với mọi $\mathfrak{p} \in A^*$.

(ii) Với n bất kỳ, tồn tại số nguyên $s(n)$ sao cho $K_{s(n)} \subseteq H_n$.

Định lý 3.1.6. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương đầy đủ và M là R -môđun hữu hạn sinh. Kí hiệu $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hai dãy giảm các môđun con của M sao cho $H_n \subseteq K_n$. Nếu hệ ngược $\{K_n/H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ thoả mãn tiêu chuẩn Mittag-Leffler, thì các mệnh đề sau tương đương.

(i) $\varprojlim_n K_n/H_n = 0$.

(ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

(iii) Với n bất kỳ, tồn tại số nguyên $s(n)$ sao cho $K_{s(n)} \subseteq H_n$.

Hệ quả 3.1.12. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương đầy đủ với tôpô $\mathfrak{m}$ -adic. Cho M là R -môđun compact tuyến tính nửa rời rạc. Cho $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ là cơ sở lân cận tại không điểm của M chứa các môđun con. Giả sử rằng $\{V_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ là họ các môđun con của M sao cho $\bigcap_{j \in \mathcal{J}} V_j = 0$ với mỗi cặp V_j, V_k tồn tại V_l sao cho $V_l \subseteq V_j \cap V_k$. Khi đó với mọi $i \in \mathcal{I}$, tồn tại $j(i) \in \mathcal{J}$ sao cho $V_{j(i)} \subseteq U_i$.

3.2 Đối đồng điều địa phương hình thức và dãy lọc chiều

Định lý 3.2.1. *Cho I là idêan của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Các mệnh đề sau là tương đương.*

- (i) $\mathcal{F}_I^0(M) = 0$.
- (ii) $\dim \widehat{R}/(I\widehat{R}, \mathfrak{p}) > 0$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$.
- (iii) Với mọi n , tồn tại số nguyên $s(n)$ sao $I^{s(n)}M :_M \langle \mathfrak{m} \rangle \subseteq I^n M$.

Nhận xét 3.2.2. (i) Theo định lý trên, môđun đối đồng điều địa phương hình thức thứ 0 triệt tiêu khi và chỉ khi tôpô tuyến tính cảm sinh bởi $\{I^n M :_M \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ tương đương với tôpô I -adic trên môđun hữu hạn sinh M .

(ii) Ở đây, ta có góc nhìn khác về môđun $I^n M :_M \langle \mathfrak{m} \rangle$. Với mỗi số tự nhiên n , môđun $I^n M :_M \langle \mathfrak{m} \rangle / I^n M$ chính là môđun con lớn nhất của môđun $M/I^n M$ sao cho nó có chiều nhỏ hơn bằng 0. Thật vậy, với N là môđun con của M chứa $I^n M$ sao cho $\dim N/I^n M \leq 0$. Khi đó $N/I^n M$ là môđun $\mathfrak{m}$ -xoắn. Tức là với mỗi $x \in N$ tồn tại số tự nhiên s sao cho $m^s x \subseteq I^n M$, nói cách khác $x \in I^n M :_M \langle \mathfrak{m} \rangle$. Do đó $N \subseteq I^n M :_M \langle \mathfrak{m} \rangle$.

Phần (ii) trong nhận xét 3.2.2 dẫn ta đến khái niệm lọc chiều được nghĩa bởi Schenzel (xem [10]).

Bây giờ, cho I là idêan của vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$. Đặt $d := \dim_R(M/IM)$. Lưu ý rằng $\dim_R(M/I^n M) = d$ với mọi số tự nhiên n . Khi đó, với mọi n và $0 \leq i \leq d$, ta đặt $M_i^{I,n}$ là môđun con chứa $I^n M$ của M sao cho $M_i^{I,n}/I^n M$ là môđun con lớn nhất của $M/I^n M$

sao cho $\dim_R(M_i^{I,n}/I^n M) \leq i$. Dễ dàng thấy $\{M_i^{I,n}/I^n M\}_{0 \leq i \leq d}$ là dãy lọc chiều của môđun thương $M/I^n M$.

Định lý 3.2.4. *Cho I là iđêan của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Đặt $d := \dim_R(M/IM)$. Giả sử $0 \leq t \leq d$ là số nguyên nhỏ nhất sao cho tôpô tuyến tính cảm sinh bởi $\{M_t^{I,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ không tương đương với tôpô I -adic. Khi đó $\mathcal{F}_I^t(M) \neq 0$.*

4 Đối đồng điều địa phương hình thức ứng với idêan không tối đại

Nội dung chính của chương này xoay quanh bài toán khảo sát các môđun $\mathcal{F}_{I,J}^i(M)$ trong trường hợp J không là idêan tối đại. Trong quá trình giải quyết vấn đề trên, chúng tôi tìm được một kỹ thuật mới về đối đồng điều địa phương. Đó là sử dụng các hàm tử dẫn xuất phải của tích biến đổi idêan D_J và hàm tử xoắn Γ_I . Một phần kết quả trong chương này được công bố trong [8].

4.1 Biến đổi idêan và đối đồng điều địa phương

Định lý 4.1.3. *Cho I, J là các idêan của R và i là số nguyên. Khi đó hàm tử dẫn xuất phải $R^i(D_J\Gamma_I)$ tương đương tự nhiên với $\varinjlim_n \varinjlim_m \text{Ext}_R^i(J^m/I^n J^m, \square)$. Do đó, tồn tại đẳng cấu*

$$R^i(D_J\Gamma_I)(M) \cong \varinjlim_n \varinjlim_m \text{Ext}_R^i(J^m/I^n J^m, M)$$

với mọi R -môđun M .

Định lý 4.1.7. *Cho I, J là các idêan của R , và M là R -môđun.*

Đặt

$$s = \sup\{\dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \notin V(J)\}.$$

Khi đó $R^i(D_J\Gamma_I)(M) = 0$ với mọi $i > s$.

Bổ đề 4.1.8. Cho I, J là các idêan của R . Cho $x \in R$ là phần tử chính quy J -lọc của R -môđun M . Khi đó tồn tại dãy khớp dài

$$\dots \longrightarrow R^i(D_J\Gamma_I)(M) \xrightarrow{x} R^i(D_J\Gamma_I)(M) \longrightarrow R^i(D_J\Gamma_I)(M/xM) \longrightarrow \dots$$

Định lý 4.1.9. Cho M là R -môđun. Khi đó, với $t > 0$, các mệnh đề sau tương đương.

(i) $R^i(D_J\Gamma_I)(M) = 0$ với mọi $i < t$.

(ii) $H_I^i(M)$ là J -xoắn với mọi $i < t$.

Nếu M là môđun hữu hạn sinh thì (i) và (ii) tương đương với

(iii) I chứa M -dãy chính quy J -lọc có độ dài t .

Định lý 4.1.9. Cho I, J là các idêan của R . Khi đó, với mỗi R -môđun M , tồn tại dãy khớp dài

$$\dots \longrightarrow H_J^i(M) \longrightarrow H_{I \cap J}^i(M) \longrightarrow R^i(D_J\Gamma_I)(M) \longrightarrow \dots$$

Hệ quả 4.1.13. Cho I, J là các idêan của R . Cho M là R -môđun.

Đặt $s = \sup\{\dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \notin V(J)\}$. Khi đó $H_J^i(M) \cong H_{I \cap J}^i(M)$ với mọi $i > s + 1$ và $H_J^{s+1}(M) \rightarrow H_{I \cap J}^{s+1}(M)$ là toàn cấu.

Định lý 4.1.15. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và I là idêan của R . Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó, với $t > 0$, các mệnh đề sau tương đương.

(i) $R^i(D_{\mathfrak{m}}\Gamma_I)(M) = 0$ với mọi $i < t$.

(ii) $H_I^i(M)$ là Artin với mọi $i < t$.

(iii) I chứa M -dãy chính quy $\mathfrak{m}$ -lọc có độ dài t .

4.2 Đối đồng điều địa phương hình thức thứ 0

Mệnh đề 4.2.1. Cho M là R -môđun. Khi đó

$$\mathcal{F}_{I,J}^0(M) \cong \varprojlim_t H_J^0(M/I^t M).$$

Định lý 4.2.3. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Giả sử R đầy đủ trong tôpô I -adic. Khi đó tồn tại đẳng cấu

$$\mathcal{F}_{I,J}^0(M) \cong \bigcap_{t \in \mathbb{N}} (I^t M :_M \langle J \rangle).$$

Hệ quả 4.2.4. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Giả sử R là đầy đủ I -adic. Khi đó các mệnh đề sau tương đương.

- (i) $\mathcal{F}_{I,J}^0(M) = 0$.
- (ii) Với mỗi idêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)$, ta có $J^m \not\subseteq I + \mathfrak{p}$ với mọi số nguyên m .

Hơn nữa, nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương đầy đủ thì (i) và (ii) tương đương với

- (iii) Với mọi t , tồn tại số nguyên $s(t)$ sao cho $I^{s(t)} M :_M \langle J \rangle \subseteq I^t M$.

4.3 Các đẳng cấu và dãy khớp

Ta bắt đầu mục này bằng nhận xét sau về độ sâu lọc.

Hệ quả 4.3.3. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương. Cho I, J là các idêan của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó $f\text{-depth}_J(M/I^n M)$ mang giá trị ổn định với n đủ lớn. Ta kí hiệu giá trị ổn định này là $f\text{-depth}_J^*(I, M)$.

Hệ quả 4.3.4. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương. Cho I, J là các ideal của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó

$$\mathcal{F}_{I,J}^i(M) \cong \varprojlim_t H_J^i(M/I^t M)$$

với mọi $i \leq f\text{-depth}_J^*(I, M)$.

Định lý 4.3.14. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Cho I, J là các ideal của R . Chọn $x \in R$ là phần tử chính quy J -lọc của $M/I^n M$ với mọi n đủ lớn. Khi đó tồn tại dãy khớp dài

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda_I(0 :_M x) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{I,J}^0(M) & \xrightarrow{x} & \mathcal{F}_{I,J}^0(M) \\ & & \longrightarrow & \mathcal{F}_{I,J}^0(M/xM) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{I,J}^1(M) & \xrightarrow{x} \mathcal{F}_{I,J}^1(M) \\ & & \longrightarrow & \mathcal{F}_{I,J}^1(M/xM) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

4.4 Tính triệt tiêu

Mệnh đề 4.4.1. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó $\mathcal{F}_{I,J}^i(M) = 0$ với mọi $i > \dim M/IM$.

Định lý 4.4.4. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Đặt $d = \dim(M/IM)$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương.

- (i) $\mathcal{F}_{I,J}^d(M) = 0$.
- (ii) Với mỗi ideal nguyên tố $P \in \text{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{M}/I\widehat{M})$, sao cho $\dim \widehat{R}/P = d$, ta có $\dim \widehat{R}/(I\widehat{R} + P) > 0$.

5 Đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức

Trong chương này, $(R, \mathfrak{m})$ kí hiệu cho vành Noether địa phương giao hoán với đơn vị khác không. Chúng tôi giới thiệu một mở rộng của khái niệm môđun đối đồng điều địa phương hình thức, mà chúng tôi gọi là môđun đối đồng địa phương suy rộng hình thức.

5.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Cho I, J là các idêan của vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$. Giả sử rằng $J = \sqrt{(x_1, \dots, x_r)R}$. Kí hiệu $C_{\underline{x}}$ là phức Čech của vành R ứng với $\underline{x} = x_1, \dots, x_r$. Nếu M là R -môđun hữu hạn sinh thì tồn tại phép giải tự do $\mathbf{F}_{\bullet}$ của M sao cho các R -môđun tự do $F_i (i = 0, 1, \dots)$ đều hữu hạn sinh. Với mọi R -môđun N , ta có song phức $C^{\bullet\bullet} = \{C^{pq}\}$ với $C^{pq} = \text{Hom}_R(F_q, C_{\underline{x}}^p \otimes_R N)$. Khi đó ta xây dựng được phức toàn phần $\text{Tot}(C^{\bullet\bullet})$ của song phức $C^{\bullet\bullet} = \{C^{pq}\}$ định nghĩa bởi

$$\text{Tot}(C^{\bullet\bullet})^i = \bigoplus_{p+q=i} C^{pq} = \bigoplus_{p+q=i} \text{Hom}_R(F_q, C_{\underline{x}}^p \otimes_R N).$$

Bây giờ hệ ngược các môđun $\{N/I^t N\}_{t \in \mathbb{N}}$ cảm sinh hệ ngược các phức toàn phần $\{\text{Tot}(C_t^{\bullet\bullet})\}_{t \in \mathbb{N}}$ trong đó

$$\text{Tot}(C_t^{\bullet\bullet})^i = \bigoplus_{p+q=i} \text{Hom}_R(F_q, C_{\underline{x}}^p \otimes_R N/I^t N).$$

Định nghĩa 5.1.1. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun tùy ý. Môđun đối đồng điều địa phương suy rộng I -hình thức thứ i , $\mathcal{F}_{I,J}^i(M, N)$, của M và N ứng với idêan J được định nghĩa bởi

$$\mathcal{F}_{I,J}^i(M, N) = H^i(\varprojlim \text{Tot}(C_t^{\bullet\bullet})).$$

Trong trường hợp $J = \mathfrak{m}$, $\mathcal{F}_{I,\mathfrak{m}}^i(M, N)$ được gọi là môđun đối đồng điều địa phương suy rộng I -hình thức và kí hiệu ngắn gọn là $\mathcal{F}_I^i(M, N)$.

Nếu $M = R$ thì môđun đối đồng điều địa phương suy rộng I -hình thức thứ i trùng với môđun đối đồng điều I -hình thức (Xem [11]).

Định lý 5.1.2. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun tùy ý. Tồn tại dãy khớp ngắn các môđun và các đồng cấu

$$0 \longrightarrow \varprojlim_t H_J^{i-1}(M, N/I^t N) \longrightarrow \mathcal{F}_{I,J}^i(M, N) \longrightarrow \varprojlim_t H_J^i(M, N/I^t N) \longrightarrow 0$$

với mọi $i \in \mathbb{Z}$. Trong trường hợp $J = \mathfrak{m}$ và N hữu hạn sinh, dãy khớp trên cảm sinh đẳng cấu

$$\mathcal{F}_I^i(M, N) \cong \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M, N/I^t N)$$

với mọi số nguyên i .

Định lý 5.1.8. Cho $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ là dãy khớp ngắn các R -môđun hữu hạn sinh. Với M là R -môđun hữu hạn sinh và I là idêan của vành R , ta có dãy khớp dài

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_I^i(M, A) \longrightarrow \mathcal{F}_I^i(M, B) \longrightarrow \mathcal{F}_I^i(M, C) \longrightarrow \dots$$

5.2 Tính triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu tính triệt tiêu của các môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức.

Mệnh đề 5.2.1. *Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $r = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N/IN$. Khi đó $\mathcal{F}_I^i(M, N) = 0$ với mọi $i > r + d$.*

Định lý 5.2.4. *Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{pd}M < \infty$. Khi đó $\mathcal{F}_I^i(M, N) = 0$ với mọi $i < \text{fgrade}_I(N)$.*

Định nghĩa 5.2.5. Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh và I là idêan của R . Chiều đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức $\text{fcd}_I(M, N)$ được định nghĩa như sau

$$\text{fcd}_I(M, N) = \sup\{i \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_I^i(M, N) \neq 0\}.$$

Bậc hình thức $\text{fgrade}_I(M, N)$ của hai môđun M, N ứng với idêan I là số nguyên xác định bởi

$$\text{fgrade}_I(M, N) = \inf\{i \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_I^i(M, N) \neq 0\}.$$

Định lý 5.2.8. *Cho M, N, L là các R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{pd}M < \infty$ và $\text{Supp}_R L \subseteq \text{Supp}_R N$. Khi đó $\text{fcd}_I(M, L) \leq \text{fcd}_I(M, N)$.*

5.3 Tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức

Nội dung chính của mục này trình bày các kết quả về tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức.

Định lý 5.3.2. Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{pd}M < \infty$. Cho t là số nguyên sao cho $\mathcal{F}_I^i(M, N)$ Artin với mọi $i > t$ và L là R -môđun hữu hạn sinh sao cho $I \subseteq \text{Ann}_R(L)$. Khi đó $\mathcal{F}_I^t(M, N) \otimes_R L$ Artin.

Định lý 5.3.4. Cho M, N là các môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{pd}M < \infty$. Cho t là một số nguyên tùy ý. Các mệnh đề sau tương đương.

- (i) $\mathcal{F}_I^i(M, N)$ Artin với mọi $i > t$.
- (ii) $\mathcal{F}_I^i(M, N)$ I -ổn định với mọi $i > t$.
- (iii) $\mathcal{F}_I^i(M, N)$ biểu diễn được với mọi $i > t$.
- (iv) $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R \mathcal{F}_I^i(M, N)}$ với mọi $i > t$.

5.4 Môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức bậc cao

Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $r = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N/IN$. Cho $i \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}$. Chúng ta xét các đồng cấu tự nhiên

$$p_n^i : \mathcal{F}_I^i(M, N) = \varprojlim_t H_{\mathfrak{m}}^i(M, N/I^t N) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M, N/I^n N).$$

Đặt $K_n^i = \text{Ker} p_n^i$. Ta có $\{K_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy giảm các môđun con của $\mathcal{F}_I^i(M, N)$.

Định lý 5.4.2. Cho M, N các R -môđun hữu hạn sinh với $r = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N/IN$. Khi đó ta có đẳng cấu

$$\mathcal{F}_I^{r+d}(M, N)/K_n^{r+d} \cong H_{\mathfrak{m}}^{r+d}(M, N/I^n N)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Hệ quả 5.4.4. Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $r = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N/IN > 0$. Nếu $\mathcal{F}_I^{r+d}(M, N)$ khác không thì nó không hữu hạn sinh.

Định lý 5.4.6. Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $r = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N/IN$. Các mệnh đề sau tương đương.

- (i) $\mathcal{F}_I^{r+d}(M)$ Artin.
- (ii) Dãy giảm $\{K_n^{r+d}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dừng.
- (iii) Dãy giảm $\{I^n \mathcal{F}_I^{r+d}(M)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dừng.
Hơn nữa, nếu $d > 0$ thì (i), (ii) và (iii) tương đương với
- (iv) $\mathcal{F}_I^{r+d}(M, N)$ là minimax.

6 Kết quả và bàn luận

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của môđun đối đồng điều địa phương hình thức $\mathcal{F}_I^i(M)$, $\mathcal{F}_{I,J}^i(M)$, xây dựng định nghĩa và nghiên cứu một cách hệ thống các môđun $\mathcal{F}_I^i(M, N)$. Bên cạnh đó, để giải quyết các bài toán trên, chúng tôi còn đưa hai công cụ mới: Định lý Chevalley mở rộng, các hàm tử dẫn xuất phải $R^i(D_J\Gamma_I)$. Bước đầu, chúng tôi thu được một số kết quả sau:

1. Xác định số nguyên i lớn nhất sao cho $F_I^i(M)$ không Artin.
2. Mô tả tập hữu hạn $\text{Coass}_R(\mathcal{F}_I^l(M)) \cap V(I)$ trong đó $l = \dim_R(M/IM)$.
3. Các kết quả của môđun đối đồng điều địa phương hình thức $F_I^i(M)$ liên quan đến phạm trù con Serre.
4. Đưa ra các dạng mở rộng Định lý Chevalley cho vành địa phương đầy đủ.
5. Mối liên hệ giữa tính triệt tiêu của $\mathcal{F}_I^i(M)$ và sự tương đương của một số tôpô tuyến tính.
6. Các tính chất của các hàm tử dẫn xuất phải $R^i(D_J\Gamma_I)$.
7. Chứng minh với mỗi R -môđun M tồn tại dãy khớp dài

$$\dots \longrightarrow H_J^i(M) \longrightarrow H_I^i(M) \longrightarrow R^i(D_J\Gamma_I)(M) \longrightarrow \dots$$

8. Các tính chất của môđun đối đồng điều địa phương hình thức $\mathcal{F}_{I,J}^i(M)$ trong trường hợp J không tối đại.
9. Định nghĩa môđun đối đồng điều địa phương suy rộng hình thức $\mathcal{F}_I^i(M, N)$.
10. Một số tính chất về tính triệt tiêu, tính Artin của $\mathcal{F}_I^i(M, N)$.

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau đây

- Tính hữu hạn của tập idêan nguyên tố đối liên kết của $\mathcal{F}_I^i(M)$.
- Nghiên cứu về bậc hình thức $\text{fgrade}_I(M)$.
- Áp dụng các dạng mở rộng định lý Chevalley vào các bài toán so sánh các tôpô idêan trên môđun hữu hạn sinh.

Danh mục các công trình của tác giả

1. T. T. Nam, T. L. Quyen, N. H. H. Tu and N. M. Tri (2022), Some results on formal local cohomology, *J. Algebra Appl.* **21**(8), 2250149 (15 pages).
2. T. T. Nam and N. H. H. Tu (2024), Some results on the 0-th formal local cohomology with respect to a non-maximal ideal, *J. Sci. Ho Chi Minh City Univ. Educ.* **21**(3), 460-467.
3. T. T. Nam and N. H. H. Tu (2024), Some results on ideal-adic topologies and applications, *J. Algebra Appl.* (online published).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

- [1] Asgharzadeh M. and Divaani-Aazar K. (2011), Finiteness properties of formal local cohomology modules and Cohen-Macaulayness, *Comm. Algebra* **39**(3) 1082-1103.
- [2] Brodmann M. P. and Sharp R. Y. , Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications, 2nd edition, Cambridge University Press, 2013.
- [3] Chu L.(2010), Some results for formal local cohomology modules, *Comm. Math. Res.* 26, 230-236.
- [4] Hartshorne R. (1968), Cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann. of Math.* 88, 403-450.
- [5] Melkersson L. and Schenzel P. (1995), The co-localization of an Artinian module, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 38, 121-131.
- [6] T. T. Nam, N. H. H. Tu and N. M. Tri (2019), The top local cohomology module, *Period. Math. Hung.* **79**(1), 1-11.
- [7] T. T. Nam, T. L. Quyen, N. H. H. Tu and N. M. Tri (2022), Some results on formal local cohomology, *J. Algebra Appl.* **21**(8), 2250149 (15 pages).

- [8] T. T. Nam and N. H. H. Tu (2024), Some results on the 0-th formal local cohomology with respect to a non-maximal ideal, *J. Sci. Ho Chi Minh City Univ. Educ.* **21**(3), 460-467.
- [9] T. T. Nam and N. H. H. Tu (2024), Some results on ideal-adic topologies and applications, *J. Algebra Appl.* (accepted).
- [10] Schenzel P. (1999), On the dimension filtration and Cohen–Macaulay filtered modules, in: F. Van Oystaeyen (Ed.), Commutative Algebra and Algebraic Geometry, in: Lecture Notes Pure Appl. Math., vol. 206, Dekker, New York, pp. 245–264.
- [11] Schenzel P. (2007), On formal local cohomology and connectedness, *J. Algebra* 315, 894-923.
- [12] Yan G. (2014), The Artinianness Of Formal Local Cohomology Modules, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **2**(2), 449-456.

Tiếng Pháp

- [13] Grothendieck A., Cohomologie local des faisceaux coherents et the-
orèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA2), North-Holland,
Amsterdam, 1968
- [14] Peskine C. and Szpiro L. (1973), Dimension projective finie et co-
homologie

Tiếng Đức

- [15] Herzog J. (1970), *Komplexe, Auflösungen und dualität in der
lokalen Algebra*, Habilitationsschrift, Universität Regensburg.